FUNZIONI DIFFERENZIABILI

FUNZIONI A 1 VARIABILE:

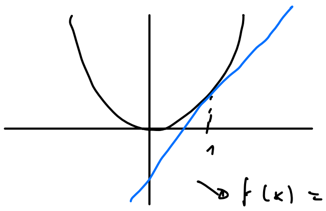
↳ DERIVABILITÀ E DIFFERENZIABILITÀ IN x_0 <u>SONO SINONIMI</u>

$h = x - x_0$ = DISTANZA TRA IL PUNTO x E IL PUNTO x_0

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{RETTA TANGENTE A } f \text{ NEL PUNTO } x_0} + \underbrace{\varepsilon(x - x_0)}_{\text{ERRORE}}$$

$$\frac{\varepsilon(h)}{h} \xrightarrow{h \to 0}$$

↳ ERRORE → PIÙ x È VICINO A x_0 L'APPROSSIMAZIONE È BUONA



→ $f(x) = x^2$

$$f(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ f(1)}}{1} + 2(x-1) + \varepsilon(x-1)$$

IN $\mathbb{R}^2$

DEF. DIFFERENZIABILITÀ

f è DIFFERENZIABILE IN (x_0, y_0) SE:

→ PIANO TANGENTE + ERRORE ε

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \varepsilon(x-x_0, y-y_0)$$

$$\frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \xrightarrow{h,k \to 0} 0$$

$x - x_0 = h$

$y - y_0 = k$

DISTANZA TRA (x,y) E (x_0,y_0) È

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \sqrt{h^2+k^2}$$

ESEMPIO

$f(x,y) = x^2 + y^2$ $\quad$ f È DIFFERENZIABILE IN TUTTO $\mathbb{R}^2$

$(x_0, y_0) = (1,1)$

$f_x(x,y) = 2x$ $\quad$ $f_y(x,y) = 2y$

$$f(x,y) = \underbrace{2 + 2(x-1) + 2(y-1)}_{\text{PIANO TANGENTE}} + \underbrace{\varepsilon(x-1, y-1)}_{\text{ERRORE}}$$

$$\frac{\varepsilon(x-1, y-1)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}} \xrightarrow{(x,y)\to(1,1)} 0$$

SE $\exists f'(x_0) \Rightarrow f$ È CONTINUA IN x_0

PER FUNZIONI A PIÙ VARIABILI NON È PIÙ VERO !!!

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & 0 \end{cases}$$

$\exists f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ MA f NON È CONTINUA IN $(0,0)$

SE f È DIFFERENZIABILE IN $(x_0, y_0) \Rightarrow$ f È CONTINUA IN (x_0, y_0)

- TH. COND. SUFF. PER DIFFERENZ.

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ D APERTO

$f \in C^1(D) \Rightarrow f$ È DIFFERENZIABILE SU TUTTO D

SE $f \notin C^1(D)$ NON È DETTO CHE NON SIA DIFF.

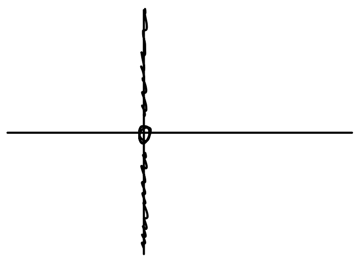
CONTROESEMPIO

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = x \cdot y^{1/3}$

f È DIFF. IN TUTTO D ?

$f_x(x,y) = y^{1/3}$ $f_x(0,0) = 0$

$f_y(x,y) = \frac{x}{y^{2/3}}$ NON ESISTE NEMMENO IN TUTTI PUNTI $(x, 0)$ CON $x \neq 0$



$f \notin C^1(\mathbb{R}^2)$

APPLICANDO LA DEF. $\to f_y(0,0) = 0$

$$\frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} \xrightarrow{h \to 0} 0$$

f È DIFF. IN UN PUNTO SE $f(x,y) = 0 + 0 + 0 + \varepsilon(x-0, y-0)$

$$= \underbrace{\varepsilon(x,y)}_{\to x \cdot y^{1/3}}$$

DEVO DIM. CHE:

$$\frac{\varepsilon(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x \cdot y^{1/3}}{\sqrt{x^2+y^2}} \xrightarrow{(x,y) \to (0,0)} 0$$

$$\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x|$$

$$\left| \frac{x \cdot y^{1/3}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq g(y) \xrightarrow{y \to 0} 0$$

$$g(x) \xrightarrow{x \to 0} 0$$

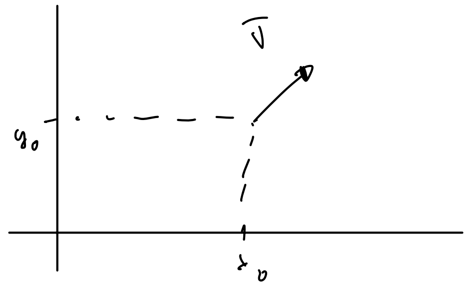
$$\frac{|x|\,|y|^{1/3}}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{\cancel{|x|}\,|y|^{1/3}}{\cancel{|x|}} \qquad \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{1}{|x|}$$

$$|y|^{1/3} = g(x)$$

→ TENDE A ZERO PER $y \to 0$

DERIVATA DIREZIONALE

MISURA LA VELOCITÀ CON CUI UNA FUNZIONE f CAMBIA (VARIA) LUNGO UNA PARTICOLARE DIREZIONE DEL PIANO IN UN CERTO PUNTO



UNA DIREZIONE SI IDENTIFICA CON UN VERSORE
= VETTORE DI LUNGHEZZA 1

$\bar{v} = (v_x, v_y) \qquad v_x^2 + v_y^2 = 1$

- **DERIVATA DIREZIONALE DEF.** f AMMETTE DERIV. DIREZ. IN (x_0, y_0) LUNGO LA DIREZIONE $\bar{v}$ SE

$$\frac{f(x_0 + t v_x, y_0 + t v_y) - f(x_0, y_0)}{t} \xrightarrow{t \to 0} D_{\bar{v}} f(x_0, y_0)$$

$f_x(x_0, y_0)$ È LA DERIV. DIREZ. LUNGO L'ASSE x
$\bar{v} = (1, 0)$

$f_y(x_0, y_0)$ " " " LUNGO ASSE y
$\bar{v} = (0, 1)$

TEOREMA:

SE f È DIFF. IN $(x_0, y_0) \Rightarrow f$ AMMETTE $D_{\bar{v}} f(x_0, y_0)$ E

$$D_{\bar{v}}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cdot v_x + f_y(x_0, y_0) \cdot v_y$$

DIM.

$$\underbrace{f(x_0+tV_x}_{x},\ \underbrace{y_0+tV_y}_{y}) - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\,tV_x + f_y(x_0,y_0)\,tV_y + \varepsilon(tV_x, tV_y)$$

DIFFERENZIABILITÀ

$x = x_0 + tV_x$
$y = y_0 + tV_y$

$$\frac{f(x_0+tV_x,\ y_0+tV_y) - f(x_0,y_0)}{t} = f_x(x_0,y_0)V_x + f_y(x_0,y_0)V_y + \underbrace{\frac{\varepsilon(tV_x,tV_y)}{t}}$$

$t \to 0$ DEVE FARE 0 ....

$$\frac{\varepsilon(tV_x,tV_y)}{t\sqrt{t^2V_x+t^2V_y}} \xrightarrow{t\to 0} 0 = \frac{\varepsilon(tV_x,tV_y)}{t} \xrightarrow{t\to 0} 0$$

$\underset{1}{\shortparallel}$

$\bar{v} = (V_x, V_y)$

VETTORE GRADIENTE $\bar{\nabla} f(x_0,y_0) = [f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0)]$

PRODOTTO SCALARE
$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y = \|\bar{a}\|\cdot\|\bar{b}\|\cdot\cos(\widehat{ab})$

$D_{\bar{v}} f(x_0;y_0) = \bar{\nabla} f(x_0,y_0)\cdot\bar{v}$ PRODOTTO SCALARE

$= \|\bar{\nabla} f(x_0,y_0)\|\ \|\bar{v}\|\cdot\cos(\theta)$

$= \|\bar{\nabla} f(x_0,y_0)\|\cdot\cos\theta$

$\hookrightarrow$ MAX $=1$ $\to$ $\theta = 0$

$\hookrightarrow$ È IL MASSIMO QUANDO $\bar{\nabla} f(x_0,y_0)$ E $\bar{v}$ SONO LUNGO LA STESSA DIREZIONE

LA DIREZIONE DI MASSIMA ASCESA È QUELLA DEL VETTORE GRADIENTE

$$\bar{\nabla} f(x_0,y_0) = [f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0)]$$

$\bar{\nabla} f(x_0,y_0) \neq (0,0)$

$-\bar{\nabla} f(x_0,y_0)$ DIREZ. DI MAX DISCESA

DERIVATE PARZIALI DI ORDINE SUPERIORE

$f(x,y) = x^2 y^3 - xy \qquad D = \mathbb{R}^2$

$f_x(x,y) = 2xy^3 - y \qquad f \in C^1(D)$

$f_y(x,y) = 3x^2y^2 - x \qquad f$ DIFF. SU TUTTO D

$f_{xx}(x,y) = 2y^3$ DERIVATA RIPETUTA (RISPETTO LE x) DI 2° ORDINE (PARZIALE)

$$\| \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$f_{yy}(x,y) = 6x^2y$

DERIVATA MISTA INVECE : $f_{xy}(x,y)$ → PARZIALE, PRIMA RISPETTO ALLA x E POI RISPETTO ALLA y

$\quad \llcorner\ 6xy^2 - 1$

$f_{yx}(x,y) = 6xy^2 - 1$

} LE 2 MISTE SONO UGUALI

$f(x,y,z) = x^2 + yz \qquad f_x = 2x$

$f_y = z$

$f_z = y$

$f_{xy} = 0 \qquad f_{yz} = 1$

$f_{xz} = 0 \qquad f_{zy} = 1$

$f_{yx} = 0 \qquad f_{zx} = 0$

- PROPRIETÀ : TH. DI SCHWARZ

SE $f \in C^2(D) \Rightarrow$ TUTTE LE DERIVATE MISTE COINCIDONO SU TUTTO D

MATRICE HESSIANA

2×2 PER 2° ORDINE

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f \in C^2(D)$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

→ MAT. SIMMETRICA $^tA = A$

$f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad f \in C^2(D)$

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

MAT QUAD. 3x3

ESEMPIO

$f(x,y) = x^2 e^{-x} + \cos(x) \cdot \sin y^2 + 6y \qquad D = \mathbb{R}^2$

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^{-x} - 4e^{-x} + x^2 e^{-x} - \cos x \cdot \sin y^2 & -2y \sin(x) \cos y^2 \\ -2y \sin(x) \cos y^2 & 2\cos x \cos y^2 - 4y^2 \cos x \sin y^2 \end{pmatrix}$$

$f_x(x,y) = 2x e^{-x} + x^2 e^{-x}(-1) - \sin(x)\sin(y^2) + \cancel{6y}$

$f_{xx}(x,y) = 2e^{-x} +$